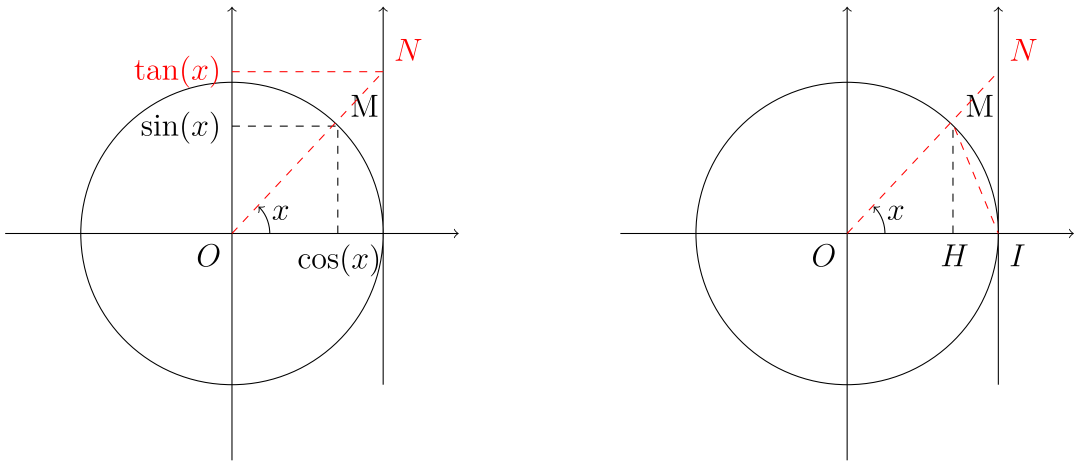
Correction du devoir maison $n°3$

Partie A : continuité et dérivabilité des fonctions circulaires

1. **Des inégalités utiles**

   (a)



   (b) i. Le triangle OMI est un triangle d'aire $\dfrac{OI \times MH}{2} = \dfrac{\sin(x)}{2}$.

   ii. Le triangle ONI est un triangle rectangle d'aire $\dfrac{OI \times IN}{2} = \dfrac{\tan(x)}{2}$.

   iii. Le secteur circulaire $\widehat{OMI}$ est d'aire $\dfrac{x}{2}$.

   Or, $OMI \subset \widehat{OMI} \subset ONI$ donc $\dfrac{\sin(x)}{2} \leq \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{\tan(x)}{2}$. Finalement,

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[,\ 0 \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

2. **Continuité en 0**

   (a) Par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to 0^+} \sin(x) = 0$.
   La fonction sinus est impaire donc $\lim\limits_{x \to 0^-} \sin(x) = -\lim\limits_{x \to 0^+} \sin(x) = 0$.
   Or, $\sin(0) = 0$ donc la fonction sinus est continue en 0.

   (b) Soit $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, $(\cos(x))^2 = 1 - (\sin(x))^2$. Par les inégalités de la première partie,

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & \sin(x) \leq x \\ 0 & \leq & (\sin(x))^2 \leq x^2 \\ -x^2 & \leq & -(\sin(x))^2 \leq 0 \\ 1 - x^2 & \leq & 1 - (\sin(x))^2 \leq 1 \\ 1 - x^2 & \leq & (\cos(x))^2 \leq 1 \end{array}$$

   (c) Par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos(x) = 1$.
   La fonction cosinus est paire donc $\lim\limits_{x \to 0^-} \cos(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \cos(x) = 1$.
   Or, $\cos(0) = 1$ donc la fonction cosinus est continue en 0.

3. **Continuité sur $\mathbb{R}$**
   (a) Soient $a, h \in \mathbb{R}$, $\cos(a+h) = \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h)$
   $\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h)$.
   (b) $\lim\limits_{h\to 0} \sin(a+h) = \lim\limits_{h\to 0} \cos(a)\sin(h) + \sin(a)\cos(h) = \cos(a). \lim\limits_{h\to 0} \sin(h) + \sin(a). \lim\limits_{h\to 0} \cos(h) = \sin(a)$
   Donc, la fonction sinus est continue en a.
   (c) Soit $a \in \mathbb{R}$,
   $$\lim_{h\to 0} \cos(a+h) = \lim_{h\to 0} \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) = \cos(a). \lim_{h\to 0} \cos(h) - \sin(a). \lim_{h\to 0} \sin(h) = \cos(a)$$
   Donc, la fonction cosinus est continue en a.
   (d) La fonction tangente est le quotient de deux fonctions continues avec un dénominateur qui ne s'annule pas sur $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$ donc elle est continue.

4. **Des limites utiles**
   (a) On va proposer un encadrement. La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est paire. Soit $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   $$\sin(x) \leq x \text{ et } x \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
   $$\frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \text{ et } \cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x}$$
   Par encadrement, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. Par parité, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.
   (b) On utilise la limite précédente
   $$\frac{\cos(x) - 1}{x} = \frac{-2\sin(\frac{x}{2})^2}{x} = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$
   Par opération sur les limites, on obtient que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x} = 0$.

5. **Dérivabilité sur $\mathbb{R}$**
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$.
   $$\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \frac{\cos(a)\sin(h) + \sin(a)\cos(h) - \sin(a)}{h} = \cos(a).\frac{\sin(h)}{h} + \frac{\cos(h) - 1}{h}.\sin(a)$$
   donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \cos(a)$.
   La fonction sinus est donc dérivable en a et $\sin'(a) = \cos(a)$.
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$.
   $$\frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} = \frac{\cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) - \cos(a)}{h} = \cos(a).\frac{\cos(h) - 1}{h} - \frac{\sin(h)}{h}.\sin(a)$$
   donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} = -\sin(a)$.
   La fonction cosinus est donc dérivable en a et $\cos'(a) = -\sin(a)$.
   (c) La fonction tangente est le quotient de deux fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas sur $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[$ donc elle est dérivable sur cet ensemble et
   $$\tan' = \frac{\sin'.\cos - \sin.\cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

Partie B : lien entre bijectivité et complémentaire de l'image directe

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$ une application.

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f est surjective.
   Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
   Soit $y \in \overline{f(A)}$. On a $y \in F$. Par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Par l'absurde, supposons que $x \in A$.
   Donc $y = f(x) \in f(A)$. Ce qui est absurde car $y \in \overline{f(A)}$.
   Par conséquent, $x \in \overline{A}$, d'où $y = f(x) \in f(\overline{A})$.
   D'où $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.
   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que : $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.
   D'après l'hypothèse, $\overline{f(E)} \subset f(\overline{E})$ i.e. $\overline{\mathrm{Im}(f)} \subset f(\emptyset)$ i.e. $\overline{\mathrm{Im}(f)} = \emptyset$ i.e. $\mathrm{Im}(f) = F$.
   L'application f est surjective.
   Conclusion : f est surjective si, et seulement si, $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.
2. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que f est injective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
   Soit $y \in f(\overline{A})$.
   Donc il existe $x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$.
   Par l'absurde, supposons que $y \in f(A)$. Donc il existe $x' \in A$ tel que $y = f(x')$. D'où $f(x) = f(x')$, puis par injectivité de f, $x = x'$. Par conséquent, $x \in A$ ce qui est absurde.
   Donc $y \in \overline{f(A)}$.
   D'où $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que : $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
   Soit $x_1, x_2 \in E$. Supposons que $f(x_1) = f(x_2)$.
   Par l'absurde, supposons que $x_1 \neq x_2$. Donc $x_1 \in \overline{\{x_2\}}$, d'où $f(x_1) \in f(\overline{\{x_2\}}) \subset \overline{f(\{x_2\})}$.
   Or $f(x_1) = f(x_2) \in f(\{x_2\})$. Absurde.
   D'où $x_1 = x_2$.
   L'application f est injective.
   Conclusion : f est injective si, et seulement si, $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
3. D'après les deux questions précédentes : f est bijective si, et seulement si, $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.